Hoja 1

1	2	3	4	N
A	A	A	A	P

10 (diez)

LU: 349/16

Eric Brandwein
Nro. de Orden: 11

1\. a) φ: fórmula de propo.

Verdadero. Sabemos que $Con(\Gamma)$, Γ siendo un conjunto de fórmulas, siempre contiene el conjunto de tautologías, ya que si $\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$ por correctitud y completitud de SP, y entonces $\Gamma \models \alpha$. Por otro lado, sabemos que existen por lo menos dos fórmulas que son tautologías: por ejemplo, $p \vee \neg p$ y $p \rightarrow p$, siendo p un símbolo proposicional. Sabemos entonces dos cosas: que $Con(\Gamma) = Con(\Gamma) \cup \{\alpha \mid \vdash \alpha\}$, y que para todo α hay una tautología diferente de α, ya que, aunque α fuese una tautología, ~~[illegible]~~ y como hay por lo menos dos tautologías diferentes, ~~[illegible]~~ α no puede ser las dos al mismo tiempo. Como también sabemos que si una fórmula está en el consecuente de un conjunto, también lo están todas los fórmulas que son verificadas por ella ~~[illegible]~~, decir que $Con(\Gamma) = Con(\Gamma) \cup \{\alpha \mid \models \alpha\}$ es lo mismo que decir $Con(\Gamma) = Con(\Gamma \vee \{\alpha \mid \vdash \alpha\})$. Esto, junto al ~~[illegible]~~ hecho de que siempre hay una tautología diferente a φ, hace que, si tomamos ψ como una de las tautologías diferentes a φ, para todo φ exista un ψ tal que $Con\{\alpha\} = Con\{\alpha, \psi\}$.

b) Falso. Tomemos, por ejemplo, $\varphi = p \vee \neg p$ (una tautología) y $\psi = p \wedge q$, siendo p, q: símbolos proposicionales. Vemos que $Var(\varphi) = \{p\} \subsetneq Var(\psi) = \{p, q\}$. Como φ es una tautología, todas las valuaciones la ~~[illegible]~~ verifican, particularmente todas las $v: V_2 \rightarrow \{0,1\}$. En cambio, no todas las valuaciones $v: V_2 \rightarrow \{0,1\}$ ~~[illegible]~~ verifican ψ, ya que, por ejemplo, la valuación v tal que $v(p) = 0$ no la verifica. Con lo cual,

$$\#\{v: V_2 \rightarrow \{0,1\} \mid v \models \varphi\} = \#\{v: V_2 \rightarrow \{0,1\}\} > \#\{v: V_2 \rightarrow \{0,1\} \mid v \models \psi\}.$$

b) Falso.

Probar que φ_β es una tautología es lo mismo que probar que $\neg\varphi_\beta$ es una contradicción, o sea, que $(p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)) \wedge (\beta \rightarrow p_3)$ lo es. Para probar eso, sólo hace falta probar que $\beta \rightarrow p_3$ es falso siempre que $\underbrace{p_1 \rightarrow (p_2 \wedge p_3)}_{\varphi_1}$ es verdadero, ya que cuando

sigue

φ_1 es falso, y a $\neg\varphi_\beta$ ~~...~~ es falso también; Como queremos probar que $\neg\varphi_\beta$ es una contradicción tenemos que probar que en todos los casos es falso. Veamos con la tabla de verdad cuándo φ_1 es falso:

p_1	p_2	p_3	$p_1 \Rightarrow (p_2 \wedge p_3)$
1	0	1	0
1	1	0	0
1	0	0	0
todos los otros casos			1

Necesitamos probar, entonces, que cuando $p_1 = 0$, o cuando $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, $\beta \Rightarrow p_3$ es falso. Nótese que cuando digo $p_n = 0$ quiero decir que p_n evalúa a 0 en la valuación tomada, y viceversa.

Para que $\beta \rightarrow p_3$ sea falso, necesariamente $\beta = 1$ y $p_3 = 0$. Pero como hay por lo menos un caso en que se cumple φ_1 y $p_3 = 1$ (por ejemplo, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$), $\beta \Rightarrow p_3$ no puede ser falso en todos los casos en los que φ_1 es verdadero; particularmente, no puede serlo en el caso mencionado. Concluimos que no existe β que haga que $\neg\varphi_\beta$ sea una contradicción, y, por lo tanto, tampoco existe β que haga que φ_β sea una tautología.

A

Hoja 2		Eric Bromwón
	LU: 349/16	Nro. de Orden: 11

Verdadero:

2. a. Sabemos que, como $\Delta \subseteq Con(\Gamma)$, cada fórmula de Δ, llamemos α a una cualquiera, cumple que $\Gamma \models \alpha$. Por completitud y correctitud de SP, también sabemos que $\Gamma \vdash \alpha$. Esto nos dice que se puede deducir α de una demostración de finitos pasos que contenga solamente axiomas de SP, fórmulas de Γ, o fórmulas inferidas por pasos anteriores con modus ponens. Como los pasos son finitos, necesariamente se utilizan finitas fórmulas de Γ en cada demostración. Y, como Δ es finito, se necesitan finitas demostraciones, una por cada fórmula de Δ. Con lo cual, entre todas estas demostraciones se usan finitas fórmulas de Γ. Al ~~[illegible]~~ conjunto de estas fórmulas llamémoslo $\Gamma_\emptyset$. $\Gamma_\emptyset \subseteq \Gamma$, es finito, y $\Gamma_\emptyset \vdash \alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$, y de nuevo por correctitud de SP, $\Gamma_\emptyset \models \alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$. Esto es lo mismo que decir que $\Delta \subseteq Con(\Gamma_\emptyset)$. Así, encontramos un $\Gamma_\emptyset$ para cada Δ que cumple lo pedido.

b. Falso. Tomemos $\Gamma = \emptyset$. Sabemos que $Con(\emptyset)$ es igual al conjunto de las consecuencias de SP, o sea, de las tautologías. Tomemos $\Delta = \{p \vee \neg p\} \subseteq Con(\Gamma)$, ya que $p \vee \neg p$ es tautología. Nos vemos forzados a tomar $\Gamma_\emptyset = \emptyset$, ya que el único subconjunto del conjunto vacío es el vacío. Pero, como dijimos antes, $Con(\emptyset)$ es el conjunto de todas las tautologías, y Δ no es este conjunto, o sea que $\Delta \neq Con(\Gamma_\emptyset)$. Concluimos que, como $\Gamma = \emptyset$ es consistente, se cumple que no existe subconjunto finito de Γ tal que $\Delta = Con(\Gamma_\emptyset)$.

¡Muy bien! :)

Hoja 3

Eric Brandwain
LU: 349/16 Nro de Orden: 11

3. Un elemento de $\mathcal{M}$ es distinguible sii existe una $\mathcal{L}$-fórmula φ con una sola variable x libre tal que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $v(x)=e$, e siendo el elemento mencionado.

Primero, veamos que todos los elementos de la forma $(x,0)$ son distinguibles. Para esto, usaremos las fórmulas $\varphi_{(0,0)}$, $\varphi_{(1,0)}, \ldots$ y veremos que $\mathcal{M} \models \varphi_{(n,m)}[v]$ sii $v(x)=(n,m)$. Empecemos por $\varphi_{(0,0)}$:

$\varphi_{(0,0)}: (\forall y)\ \neg(y<x)$

Como el elemento $(0,0)$ es el único que cumple que todos los elementos o son el $(0,0)$ o son mayores, $\varphi_{(0,0)}$ es verificado por $\mathcal{M}$ solo cuando $v(x)=(0,0)$. Veamos esto con más detalle: $(x,a) <_{\mathcal{M}} (0,0)$ sii $(a=0$ y $x<0)$ o $(a=0$ y $0=1)$. Obviamente, $0 \neq 1$, así que la segunda condición no se cumple, y la primera condición tampoco, porque ningún $x \in \mathbb{N}$ es menor a 0. Con lo cual, el elemento $(0,0)$ es distinguible.

Seguiremos con los $\varphi_{(1,0)}, \varphi_{(2,0)}, \ldots$ Los declararemos así:

$\varphi_{(1,0)}: [(\exists y)\ y<x] \wedge [\neg(\exists y_0,y_1)\ y_0 \neq y_1 \wedge y_0<x \wedge y_1<x]$

$\varphi_{(2,0)}: [(\exists y_0,y_1)\ y_0 \neq y_1 \wedge y_0<x \wedge y_1<x] \wedge$
$[\neg(\exists y_0,y_1,y_2)\ y_0 \neq y_1 \wedge y_0 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_2 \wedge y_0<x \wedge y_1<x \wedge y_2<x]$

$\vdots$

$\varphi_{(n,0)}: [(\exists y_0,\ldots,y_{n-1})\ todosDiferentes(y_0,\ldots,y_{n-1}) \wedge todosMenoresAx(y_0,\ldots,y_{n-1})] \wedge$
$[\neg(\exists y_0,\ldots,y_n)\ todosDiferentes(y_0,\ldots,y_n) \wedge todosMenoresAx(y_0,\ldots,y_n)]$

Siendo todosDiferentes un reemplazo sintáctico de $y_0 \neq y_1 \wedge \ldots \wedge y_{n-1} \neq y_n$ pasando por todas las combinaciones de y_i e y_j, y siendo todosMenoresAx otro reemplazo sintáctico, esta vez de $y_0<x \wedge \ldots \wedge y_n<x$.
Como cada elemento de la forma $(n,0)$ tiene finitos elementos menores a él, podemos distinguirlo con la fórmula $\varphi_{(n,0)}$.
Veamos que esto es cierto: $(x,a) <_{\mathcal{M}} (n,0)$ sii $(a=0$ y $x<n)$ o $(a=0$ y $0=1)$. De nuevo, $0 \neq 1$, así que lo segundo no se cumple nunca. Nos queda que $(x,a) <_{\mathcal{M}} (n,0)$ sii $(a=0$ y $x<n)$. sigue →

Pero existen finitos pares de la forma $(x, \emptyset)$ tal que $x \in \mathbb{N}$ y $x < n$. En particular, como existen n naturales (incluyendo el $\emptyset$) menores a n, habrá n pares distintos. Y eso exactamente es lo que requiere $\varphi_{(n,\emptyset)}$ para x, que haya n pares distintos menores a él, ni más, ni menos. Concluimos que $\varphi_{(n,\emptyset)}$ es sólo verificada por $\mathcal{M}^{v}$ cuando $v(x) = (n, \emptyset)$, y por lo tanto, es distinguible $(n, \emptyset)$.
Ahora, nos falta distinguir a los pares de la forma $(n, 1)$. Para distinguirlos, ~~...~~ cambiaremos un poco la fórmula $\varphi_{(\emptyset,\emptyset)}$, y la usaremos como nuestra $\varphi(n,1)$. Recordemos:

$\varphi(\emptyset,\emptyset) : (\forall y) \neg (y < x)$

La cambiaremos así: $\varphi'_{(\emptyset,\emptyset)} : (\exists \bar{x})(\forall y) \neg (y < \bar{x})$. Ahora, este $\bar{x}$ se refiere al único elemento que cumple $\varphi_{(\emptyset,\emptyset)}$, o sea, el $(\emptyset,\emptyset)$. Usaremos la función F ahora para decir que todos los elementos "sumados" al $(\emptyset,\emptyset)$ son menores al de la forma $(n,1)$:

$\varphi_{(\alpha,\emptyset)<(n,1)} : (\exists \bar{x}) [(\forall y) \neg (y < \bar{x})] \wedge [(\forall y)$ ~~...~~ $F(\bar{x}, y) < x]$

Ahora, la única forma que la fórmula se cumple es que cualquier cosa "sumada" a $(\emptyset,\emptyset)$ sea menor a x, ya que el $(\emptyset,\emptyset)$ es el único elemento que existe que cumple que $(\forall y) \neg (y < \bar{x})$. Veamos que $F_{\mathcal{M}}((\emptyset,\emptyset), y)$ tiene la pinta $(m, \emptyset)$ para cualquier y. Digamos que $y = (w, b)$. Si $b = \emptyset$, $F_{\mathcal{M}}((\emptyset,\emptyset),(w,\emptyset)) = (\emptyset + w, \emptyset) = (w, \emptyset)$. Como w es cualquier número natural, $F_{\mathcal{M}}((\emptyset,\emptyset),(w,\emptyset))$ es cualquier par de un natural con el $\emptyset$. Si $b = 1$, $F_{\mathcal{M}}((\emptyset,\emptyset),(w,1)) = (\emptyset,\emptyset)$, ya que $b = 1 \neq a = \emptyset$.
La única forma de que x sea mayor a cualquier par de la forma $(w, \emptyset)$ es que sea de la forma $(n, 1)$, porque si fuera de la pinta $(n, \emptyset)$, ~~...~~ $x <_{\mathcal{M}} (n+1, \emptyset)$. Con esto, distinguimos a los elementos de $\mathcal{M}$ de la forma $(n, 1)$ de los que tienen la forma $(n, \emptyset)$. Nos falta ahora distinguirlos entre sí. Para lograrlo, usaremos otras fórmulas:

~~$\varphi_{(x,1) \neq (\emptyset,1)}$~~

$\varphi_{(x,1) \neq (\emptyset,1)} : [(\exists y) F(y,y) = x] \wedge [\neg (\exists y_0, y_1)\ \text{todosDiferentes}(y_0, y_1) \wedge F(y_0, y_1) = x]$

~~$\varphi_{(x,1)}$ ...~~

~~$[\neg(\ldots)$ ...~~

sigue en próxima hoja

Hoja 4		Eric Brandwein LU: 349/16 Nro. de Orden: 11

$\varphi_{(\alpha,1)\neq(1,1)}$: $[(\exists y_0, y_1)\ y_0 \neq y_1 \wedge F(y_0,y_1)=x \wedge F(y_1,y_0)=x \wedge$

$\cancel{(\neg(\exists y_0, y_2)\ todosDiferentes(y_0,y_1,y_2)}$

$\cancel{F(y_0,y_1)=x \wedge F(y_1,y_0)=x}$

$((\neg \exists y_2, y_3)\ todosDiferentes(y_0,y_1,y_2) \wedge$

$(F(y_2,y_3)=x \vee F(y_3,y_2)=x))]$

⋮

$\varphi_{(\alpha,1)\neq(n,1)}$: $[(\exists y_0,\dots,y_n)\ todosDiferentes(y_0,\dots,y_n) \wedge$

$sumasDeAParesDan\,x(y_0,\dots,y_n) \wedge$

$(\neg(\exists y_{n+1}, y_{n+2})\ todosDiferentes(y_0,\dots,y_{n+2}) \wedge$

$(F(y_{n+1},y_{n+2})=x \vee F(y_{n+2},y_{n+1})=x)))]$

En donde $sumasDeAParesDan\,x(y_0,\dots,y_n)$ es un reemplazo sintáctico para:

Si n es par: $F(y_0,y_n)=x \wedge F(y_n,y_0)=x \wedge F(y_1,y_{n-1})=x \wedge F(y_{n-1},y_1)=x \wedge \dots \wedge F(y_{n/2},y_{n/2})=x$

Si n es impar: $F(y_0,y_n)=x \wedge F(y_n,y_0)=x \wedge F(y_1,y_{n-1})=x \wedge F(y_{n-1},y_1)=x \wedge \dots \wedge F(y_{n/2+0,5},y_{n/2-0,5})=x \wedge F(y_{n/2-0,5},y_{n/2+0,5})=$

Esto es porque si n es par, la cantidad de $y_0,\dots,y_n$ es impar, y por lo tanto habrá una ~~cantidad~~ suma de ~~naturales~~ dos naturales iguales que dará igual a n.

Pasaré a explicar mejor qué significa cada una de estas fórmulas. Cada una se cumple únicamente si se puede llegar a x aplicando la F sobre una cantidad de pares de elementos limitada. Para poner un ejemplo, el par (2,1) sólo puede ser alcanzado por F_φ haciendo $F_\varphi((0,1),(2,1))$, $F_\varphi((2,1),(0,1))$ y $F_\varphi((1,1),(1,1))$, y por ningún par más de elementos, ya que todos los elementos que, aplicando la F, dan un elemento de la forma (n,1), deben tener en su segunda posición un 1, y sumar entre sus primeras posiciones a n. Como hay finitos pares de naturales que suman n para cualquier n natural, habrá también finitos pares de elementos que "sumen" (n,1)

Tenemos entonces las fórmulas $\varphi_{(\alpha,\emptyset)<(n,1)}$, que indica que todos los elementos de la forma $(\alpha,\emptyset)$ son menores a $(n,1)$, y $\varphi_{(\alpha,1)\neq(n,1)}$, que es cierta sii hay $n+1$ pares de elementos que aplicando F den $(n,1)$. No podemos utilizar $\varphi_{(\alpha,1)\neq(n,1)}$ solamente para distinguir $(n,1)$, porque también el elemento $x=(n,\emptyset)$ lo cumple. Tenemos que usar $\varphi_{(\alpha,\emptyset)<(n,1)}$ en conjunción para que la fórmula completa no valga para $(n,\emptyset)$. Nos quedan entonces las fórmulas:

$\varphi_{(0,1)}: \varphi_{(\alpha,\emptyset)<(0,1)} \wedge \varphi_{(\alpha,1)\neq(0,1)}$

$\varphi(1,1): \varphi(\alpha,\emptyset)<(1,1) \wedge \varphi(\alpha,1)\neq(1,1)$

$\vdots$

$\varphi(n,1): \varphi(\alpha,\emptyset)<(n,1) \wedge \varphi(\alpha,1)\neq(n,1)$

Con cada uno de éstos, distinguimos a $(n,1)$ de los elementos $(\alpha,\emptyset)$ y de los elementos $(\beta,1)$, siendo $\beta\neq n$.
Encontramos fórmulas que distinguen a los elementos de la forma $(\alpha,\emptyset)$ y de la forma $(\alpha,1)$, o sea, distinguimos a todos los elementos, y con lo cual probamos lo que proponía el enunciado.

Bien, aunque innecesariamente complicado

Corrigió: Franco

Hoja 5		Eric Brandwein
	LU: 349/16	Nro de Orden: 11

4- $\mathcal{L} = \{f, <, =\}$

Propiedad ~~p~~: "existe $e \in M$ tal que $\{x \in M \mid f_M(x) <_M e\}$ es infinito", que es lo mismo que decir "existe $e \in M$ tal que la cantidad de elementos que, aplicado F, son menores a e, es infinita".

Supongamos que φ es una fórmula que expresa P. ✓

Probaremos que P no es expresable encontrando un conjunto infinito de $Form(\mathcal{L})$ que contenga a $\neg\varphi$ que podamos probar que es satisfacible e insatisfacible a la vez, resultando en una contradicción. $\neg\varphi$ expresará lo contrario que φ, o sea, expresará la propiedad "para todo $e \in M$, $\{x \in M \mid F_M(x) <_M e\}$ es finito". ✓

Sean las fórmulas $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ así:

$\varphi_0: (\forall x)(\exists y) F(y) < x$

$\varphi_1: (\forall x)(\exists y_0, y_1) F(y_0) < x \wedge F(y_1) < x \wedge y_0 \neq y_1$

$\vdots$

$\varphi_n: (\forall x)(\exists y_0, \dots, y_n)$ todosMenoresA$x(y_0, \dots, y_n) \wedge$ todosDiferentes$(y_0, \dots, y_n)$ ✓

Donde todosMenoresA$x(y_0, \dots, y_n)$ es un reemplazo sintáctico para $F(y_0) < x \wedge F(y_1) < x \wedge \dots \wedge F(y_n) < x$, y todosDiferentes$(y_0, \dots, y_n)$ es un reemplazo sintáctico para $y_0 \neq y_1 \wedge y_0 \neq y_2 \wedge \dots \wedge y_{n-2} \neq y_{n-1} \wedge y_{n-2} \neq y_n \wedge y_{n-1} \neq y_n$ ✓

Armemos el conjunto $A = \{\neg\varphi\} \cup \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Probaremos insatisfacibilidad y satisfacibilidad. ✓

<u>A insatisfacible</u>: Cada una de los φ_i indica que para todo x, existen por lo menos i elementos diferentes entre sí que, aplicandoles F, son menores a x. ✓ ~~El conjunto $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, entonces, indica que~~ Supongamos que A es satisfacible. Entonces, existe una estructura y una valuación que verifican todas sus fórmulas. ✓ En particular, verifican ~~cumplen~~ $\neg\varphi$, que dice que para todo $e \in M$ hay finitos x que, aplicando F, son menores a e. ✓ Tomemos un e en particular, llamado e', y n la cantidad de x que, aplicando F, son menores a e. ✓ (sigue

Pero que haya n elementos que cumplen contradice φ_n, que dice que existen $n+1$ elementos que cumplen para todo x, en particular, para e. ✓ Con lo cual no podemos satisfacer $\neg\varphi$ y todas las φ_i simultáneamente, y entonces el conjunto A es insatisfacible. ✓

A satisfacible: ~~Asumamos~~ supongamos entonces que A es insatisfacible. Por compacidad, existe un subconjunto finito de A que es insatisfacible. ✓ Llamémoslo $a \subseteq A$. Como a tiene finitos elementos, ~~a~~ o tiene cero fórmulas φ_i, o ~~tiene~~ existe un n tal que para todo $\varphi_i \in a$, $i \leq n$. Digamos, entonces, que

$$n = \begin{cases} 0 & \text{si no hay } \varphi_i \text{ en } a \\ m & \text{sino, siendo } m \text{ el mayor } i \text{ tal que } \varphi_i \in a \end{cases}$$ ✓

Y sea entonces:

$$a' = \{\neg\varphi\} \cup \{\varphi_i \mid i \leq n\} \supseteq a$$ ✓

Si probamos que a' es satisfacible, ¿compacidad? simplemente porque $a \subseteq a'$! ~~por compacidad~~, probaremos que a también lo es, y como a es cualquier subconjunto finito de A, todo subconjunto de A será satisfacible, con lo cual, por compacidad nuevamente, A será satisfacible. ✓

Daremos una estructura $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} \models a'$, probando que a' es satisfacible. $\mathcal{E}$ tendrá un universo de $n+1$ elementos, $=_\mathcal{E}$ será la igualdad de elementos, $f_\mathcal{E}$ será la función identidad, y $<_\mathcal{E}$ será una relación de todos con todos, o sea, para todo x, y, $x <_\mathcal{E} y$. ✓

En esta estructura se verifica $\neg\varphi$, ya que, como hay finitos elementos en el universo, hay finitos x tal que $F_\mathcal{E}(x) <_\mathcal{E} e$ para todo e. ✓ También se verifican las φ_i, ya que todos los elementos se relacionan con $i+1$ elementos por medio de $<_\mathcal{E}$, porque para todo φ_i en a', $i \leq n$, y φ_n se cumple. ✓ ($\mathcal{E} \models \varphi_n \Rightarrow \mathcal{E} \models \varphi_j$ para todo $j \leq n$). Como se satisfacen todas las fórmulas de a' con una sola estructura, a' es satisfacible, por lo tanto, siguiendo el razonamiento anterior, A es satisfacible. ✓

Demostramos que A es tanto satisfacible como insatisfacible. ABS! que vino de suponer que existía una $\neg\varphi$ que expresara el contrario de p, o, lo que es lo mismo, que existía una φ que expresa p. Así demostramos que p no es expresable. ✓